مسافة ρ - هاوسدورف وتقارب المجموع فوق/تحت - البياني

أ.موضي لفته مطر الجشعمي

مدرس مساعد في وزارة التربية العراقية - المديرية العامة لتربية ذي قار -العراق

modhi.aljashaam@yahoo.com

الملخص

الهدف من هذا البحث هو دراسة الدوال الحدية العليا M والدوال الحدية الدنيا m وتعريف دورها الهام في دراسة مسائل النقاط السرجية بالنسبة لمسافة ρ - هاوسدورف , حيث يتم تحويل المسألة ذات المتحولين إلى مسألتين كل منهما بمتحول واحد .

كلمات مفتاحية : فوق/تحت - البياني، دوال محدبة - مقعرة ، نقاط سرجية ، دوال حدية عليا ودنيا، مسافة ρ - هاوسدورف .

11

ABSTRACT

The objective of this research is to study upper marginal functions and lower marginal functions and definition its important role in the study problems of saddle points by using ρ - Hausdorff distance , Where it is converted the problem of two transformer to two problem every one of them of one transformer .

Key words: epi/hypo graph , convex-concave functions ,saddle points, upper and lower marginal functions , ρ - Hausdorff distance .

Assistant Lecturer at the Iraqi Ministry of Education-Directorate General of Education Thi-Qar.

1 - مقدمة :

يلعب التحليل فوق البياني أهمية كبيرة في دراسة مسائل القيم الدنيا $(\min imization\ problems)$

لدوال بمتحول واحد وكما يلعب التحليل تحت البياني أهمية في دراسة مسائل القيم العليا $(\max imization\ problems)$.

ومن ثم ظهر التحليل فوق / تحت – البياني ليشمل كلا التحليلين السابقين ويعالج مسائل القيم الدنيا /العليا $(\min imization\ -\max imization\ problems)$ أو مايسمى مسائل النقاط السرجية $(saddle\ po\mathrm{int}\,s)$ لدوال بمتحولين مما أدى إلى خلق مفاهيم جديدة مثل : التقارب فوق / تحت البياني ، التفاضل فوق /تحت البياني ، التكامل فوق /تحت البياني ،الجمع فوق /تحت البياني، الضرب فوق /تحت البيانية .... الخ .

وقد تبنى هذه المفاهيم العديد من الباحثين في دراستهم لمسائل النقاط السرجية وكانت معظم هذه الدراسات ذات طبيعة تبولوجية
[7] , [6] , [5] , [4] , [3] .

2 - تعاريف ومفاهيم أساسية :

في البداية لابد من عرض بعض تعاريف ومفاهيم التحليل فوق البياني (Analyse epi-graphique) [1] , [8] .

ليكن X و Y فضائين منظمين و لتكن $f : X \to \bar{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\bar{R}$.

- نقول عن $C \subseteq X$ أنها مجموعة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x , y \in C \quad , \quad \forall a \in [0,1] \ ; \ a x + (1-a) y \in C$$

- نقول عن f أنها دالة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x , y \in C \quad , \quad \forall a \in [0,1] \ ; \ f\,(a x + (1-a) y\,) \le a f\,(x\,) + (1-a) f\,(y\,)$$

- نعرِّف فوق البيان (epi-graph) للدالة f ويرمز له بـ $epi\ f$ بالعلاقة :

$$epi\ f \ = \{\, (x\,,a) \in X \times R \ / \ f\,(x\,) \le a \,\}$$

- يبرهن أن الدالة f محدبة إذا وفقط إذا كانت $epi\ f$ مجموعة محدبة في $X \times R$ ونقول إن f مقعرة إذا كانت $(-f\,)$ محدبة .

- يبرهن أن f دالة نصف مستمرة من الأدنى إذا وفقط إذا كانت $epi\ f$ مجموعة مغلقة .

- نقول إن f دالة خاصة (proper) إذا وفقط إذا كانت $epi\, f$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي :

$$dom\, f = \{ x \in X \;/\; f(x) < +\infty \} \neq \phi$$

- نعـــرِّف الدالـــة المرافقـــة $f^* : X^* \to \overline{R}$ للدالـــة f بالعلاقـــة :

$$f^*(x^*) = \sup \{ < x, x^* > - f(x);\; x \in X \}$$

ونشير إلى أن الدالة f^* تكون محدبة سواء كانت f محدبة أم لم تكن .

- نرمز بـ $\Gamma(X)$ لمجموعة الدوال المحدبة نصف المستمرة من الأدنى والخاصة المعرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{\overline{R}}$.

- نعرف المجموع فوق البياني(epi-sum) للدالتين f, g ويرمز له بالرمز $f \underset{e}{+} g$ بالشكل التالي :

$$(f \underset{e}{+} g)(x) = \inf_{u \in X} \{ f(u) + g(x-u) \} \qquad \forall x \in X \qquad (1)$$

- نعرف الضرب فوق البياني(epi-multiplication) للدالة f بالعدد $\lambda > 0$ ويرمز له بالرمز $\lambda \underset{e}{*} f$ بالشكل التالي :

$$(\lambda \underset{e}{*} f)(x) = \lambda f(\lambda^{-1} x) \qquad \forall x \in X \qquad (2)$$

ويبرهن هندسياً [13] إن :

$$epi_s(\lambda \underset{e}{*} f) = \lambda epi_s f \quad \text{و} \quad epi_s(f \underset{e}{+} g) = epi_s f + epi_s g$$

حيث : epi_s يدعى فوق البيان التام للدالة f ويعرف بالعلاقة :

$$epi_S\, f = \{ (x, a) \in X \times R \;/\; f(x) < a \}$$

وبنفس الطريقة يتم تعريف المجموع تحت البياني $f \overset{h}{+} g$ (hypo-sum) للدالتين f, g بالعلاقة :

$$(f \overset{h}{+} g)(x) = \sup_{u \in X} \{ f(u) + g(x-u) \} \qquad \forall x \in X \qquad (3)$$

وكذلك الضرب تحت البياني(hypo-multiplication) للدالة g بالعدد $\mu > 0$ ويرمز له بالرمز $\mu \overset{h}{*} g$ بالشكل التالي :

$$(\mu \overset{h}{*} g)(x) = \mu g(\mu^{-1}x) \qquad \forall x \in X$$

ويبرهن هندسياً أيضاً أن :

$$hypo_s(\mu \overset{h}{*} g) = \mu\, hypo_s\, g \quad \text{و} \quad hypo_s(f \overset{h}{+} g) = hypo_s f + hypo_s g$$

حيث : $hypo_s\, g$ يدعى تحت البيان التام للدالة g ويعرف بالعلاقة :

$$hypo_S\, g = \{ (x, \beta) \in X \times R \ / \ g(x) > \beta \}$$

- نقول عن الدّالة $f : X \to \overline{R}$ إنَّها قسرية (coercive) إذا كان :

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (4)$$

نعرض الآن بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية المتعلقة بدوال ذات متحولين [11] , [8] .

- يقال عن الدالة $L : X \times Y \longrightarrow \overline{R}$ إنها محدبة – مقعرة (convex-concave) إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول ومقعرة بالنسبة للمتحول الثاني .

- تعرف الدالة الحدية العليا M $(upper\ marginal\ function)$ للدالة L بالعلاقة التالية :

$$M(x) = \sup_{y \in Y} L(x, y) \quad ; M : X \longrightarrow \overline{R} \qquad (5)$$

-تعرف الدالة الحدية الدنيا m $(lower\ marginal\ function)$ للدالة L بالعلاقة التالية :

$$m(y) = \inf_{x \in X} L(x, y) \quad ; m : Y \longrightarrow \overline{R} \qquad (6)$$

من الجدير بالذكر إذا كانت الدّالة L دالة محدبة – مقعرة عندئذٍ تكون M دالة محدبة و m دالة مقعرة .

- يعرَّف المجموع فوق/تحت - البياني $(epi/hypo-sum)$ للدالتين L, K ويرمز له بالرمز $L \underset{e|h}{+} K$ بالعلاقة التالية :

$$(L \underset{e|h}{+} K)(x, y) = \inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \{ L(u, v) + K(x - u, y - v) \} \qquad (7)$$

- يعـــرف الضـــرب فوق/تحـــت - البيـــاني $(epi/hypo-multiplication)$ للدالـــة L بالعدد $\lambda>0$ ويرمزله بالرمز $\lambda \underset{e|h}{*} L$ بالعلاقة :

$$\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)(x,y)=\lambda L\left(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y\right) \qquad (8)$$

3 - مسافة ρ - هاوسدورف :

لتكن d دالة المسافة المولدة بالنظيم $\|\cdot\|$ المعرف على X . من أجل كل مجموعة جزئية C في X نعرف المسافة بين العنصر x وبين المجموعة C بالعلاقة :

$d(x,C):=Inf\{\|x-y\|, y\in C\}$ ، (إذا كانـــت $C=\phi$ ، تكـــون $d(x,C)=\infty$)

من أجل كل $\rho\geq 0$ ، نرمز بـ ρB للكرة المغلقة في X التي مركزها الصفر ونصف قطرها ρ ، ولكل C في X نعرف :

$$C_\rho:=C\cap\rho B$$

من أجل أي مجموعتين C و D في X ، نعرف مدى تجاوز هاوسدورف $(Lexce\ Haussdorof)$ لـ C على D بالعلاقة : $e(C,D):=\sup\{d(x,D);x\in C\}$ ، (باعتبار $e=0$ إذا كانت $C=\phi$)

- تعرف ρ - مسافة هاوسدورف بين المجموعتين C و D بالعلاقة :

$$haus_\rho(D,C)=Sup\{e(C_\rho,D),e(D_\rho,C)\} \qquad (9)$$

- نقول عن متتالية من المجموعات $(D_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو المجموعة D في X بالنسبة لمسافة ρ - هاوسدورف إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} haus_\rho(D_n,D)=0\ ,\ \forall\rho\geq 0$$

- **(مسافة ρ - هاوسدورف على $\overline{R}^X$) :**

نعرف مسافة ρ - هاوسدورف بين الدالتين f و g من $\overline{R}^X$ بالعلاقة :

$$h_\rho(f,g):=haus_\rho(epif,epig);\quad \forall\rho\geq 0 \qquad (10)$$

حيث $epif$ ، $epig$ مجموعتان جزئيتان في $X\times R$ ويعرف ρB في $X\times R$ بالعلاقة :

$$\rho B_{X\times R}=\{(x,\alpha)\in X\times R:\|x\|\leq\rho;|\alpha|\leq\rho\}$$

- نقول عن متتالية من الدوال $(f_n)_{n\in N}$ أنها متقاربة نحو الدالة f في $\overline{R}^X$ بالنسبة لمسافة ρ - هاوسدورف إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} h_\rho(f_n, f) = 0 \;\; ; \;\; \forall \rho \geq 0$$

سمي هذا المفهوم بمسافة ρ - فوق البياني وتبناه العديد من الرياضيين في دراسات مختلفة ونذكر منهم[17, 16 , 15, 14] .

<u>مبرهنة 3.1</u> [15] :

لتكن $f_i \in \Gamma(X)$ و $(i=1,2)$ عندئذ من أجل كل $\rho \geq 0$ لدينا :

$$\beta(\rho)h_\rho(f_1,f_2) \leq h_\rho(f_1^*,f_2^*) \leq \alpha(\rho)h_\rho(f_1,f_2)$$

حيث كل من $\alpha(\rho)$ و $\beta(\rho)$ ثابت يتعلق بـ ρ .

والمبرهنة صحيحة من أجل دوال مقعرة ونصف مستمرة من الأعلى وخاصة باعتبار إنه إذا كانت f_i دالة مقعرة فإن (f_i -) تكون دالة محدبة .

(مسافة ρ - هاوسدورف على $\overline{R}^{X\times Y}$) :

لم يُعرف المفهوم فوق / تحت - البيان تعريفاً هندسياً دقيقاً مقارنةً بمفهومي فوق البيان وتحت البيان ، مما أدى إلى ظهور صعوبات بالتطبيق المباشر لمسافة ρ - هاوسدورف على الدوال ذوات المتحولين (محدبة – مقعرة) . ولقد كان لاستخدام الدوال الحدية العليا والدنيا في حل بعض مسائل النقاط السرجية أهمية في إعطاء تعريف آخر لمسافة ρ - هاوسدورف H_ρ على صفوف ليست بالضرورة محدبة - مقعرة بالعلاقة الآتية :

$$H_\rho(L,K) = h_\rho(M_1,M_2) + h_\rho(m_1,m_2) \qquad (11)$$

حيث M_1, M_2 (m_2, m_1) هي الدوال الحدية العليا (الدنيا) لكل من L و K على الترتيب .

نقول عن أية متتالية من الدوال $(L_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة L في $\overline{R}^{X\times Y}$ بالنسبة لمسافة ρ - هاوسدورف إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} H_\rho(L_n, L) = 0 \quad ; \quad \forall \rho \geq 0$$

مبرهنة 3.2 :

لتكن $i=1,2,3 \quad ; \quad L_i : X \times Y \longrightarrow \overline{R}$ ثلاث من الدوال المحدبة – المقعرة . عندئذ H_ρ في (11)

تحقق الخواص الآتية:

1) H_ρ موجبة : $H_\rho(L_1, L_2) \geq 0$

2) H_ρ متناظرة : $H_\rho(L_1, L_2) = H_\rho(L_2, L_1)$

3) H_ρ متباينة المثلث : لكل $\rho \geq \max\{d(0, epiM_i); d(0, epi -m_i); i=1,2,3\}$ يكون :

$$H_\rho(L_1, L_3) \leq H_{3\rho}(L_1, L_2) + H_{3\rho}(L_2, L_3)$$

حيث M_i و m_i هي الدوال الحدية العليا والدنيا للدوال L_i $(i=1,2,3)$

4) $\forall \rho \geq 0 \quad ; \quad H_\rho(L_1, L_2) = 0 \Leftrightarrow L_1$ يكافئ L_2

البرهان: إن برهان الخواص 1، 2 ، 4 ينتج مباشرة من التعريف (11) ، أما الخاصية 3) تنتج مباشرة بتطبيق المبرهنة (2.1) في [13] على الطرف الأيسر من تعريف H_ρ .

4 - ايجاد الدوال الحدية العليا والدنيا للمجموع وللضرب فوق /تحت البياني :

نذكّر أولاً بنظرية $"\inf\sup = \sup\inf"$ في [18, 9] .

مبرهنة 4.1 [9]:

لتكن $L : X \times Y \to \overline{R}$ دالة محدبة - مقعرة تحقق الشروط التالية :

i) من أجل كلّ $y \in Y$ يكون $L(., y) \in \Gamma(X)$.

ii) يوجد $y_0 \in Y$ بحيث $L(., y_0)$ دالة قسرية.

iii) يوجد $y_1 \in Y$ بحيث $L(., y_1)$ دالة خاصة.

عندئذٍ :

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} L(x, y) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} L(x, y)$$

مبرهنة 4.2 :

لتكن $L\ ,\ K : X \times Y \to \overline{R}$ دالتين محدبتين – مقعرتين ولنفرض أنه:

$i)$ من أجل كلّ $y \in Y$ يكون $L(.,y) \in \Gamma(X)$ و $K(.,y) \in \Gamma(X)$.

$ii)$ يوجد $y_1 \in Y$ بحيث $L(.,y_1)$ دالة قسرية.

$iii)$ يوجد $y_2 \in Y$ بحيث $K(.,y_2)$ دالة خاصة.

عندئذ :

$$M_{e/h} = M_1 \underset{e}{+} M_2$$

حيث $M_1, M_2 , M_{e/h}$ هي الدوال الحدية العليا للدوال $L\ , K\ , K \underset{e/h}{+} L$ على الترتيب .

إضافة لذلك ; إذا كانت $K(.,y_2)$ دالة قسرية على X من أجل $y_2 \in Y$ فإن :

$$m_{e/h} = m_1 \overset{h}{+} m_2$$

حيث : $m_1, m_2 , m_{e/h}$ هي الدوال الحدية الدنيا للدوال $L\ , K\ , K \underset{e/h}{+} L$ على الترتيب .

البرهان :

حسب تعريف الدالة الحدية العليا في العلاقة (5) يكون :

$$\begin{aligned} M_{e/h}(x) &= \sup_{y \in Y} \{(L \underset{e/h}{+} K)(x,y)\} \\ &= \sup_{y \in Y} \inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \{(L(u,v) + K(x-u, y-v)\} \\ &= \sup_{y \in Y} \inf_{u \in X} \psi(u,y) \end{aligned}$$

حيث :

$$\psi(u,y) = \sup_{v \in Y} \{(L(u,v) + K(x-u, y-v)\}$$

اعتمادا على الفرض وعلى خواص الدوال الحدية المغلقة ، نلاحظ أن $\psi(\ .,y) \in \Gamma(X)$ من أجل كل $y \in Y$ من جهة أخرى لدينا :

$$\psi(u,y)\geq L(u,v)+K(x-u,y-v)$$

بأخذ $y_1=v$ و $y_1+y_2=y$ نحصل على :

$$\psi(u,y_1+y_2)\geq L(u,y_1)+K(x-u,y_2)$$

بما أن K دالة خاصة حسب الفرض (3) فإنها لا تطابق $+\infty$ ولا تأخذ نهائياً القيمة $-\infty$ ، وبما أن L دالة قسرية على X حسب الفرض (2) فإنه حسب تعريف الدالة القسرية نستنتج أن :

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \psi(u,y_1+y_2)\geq+\infty$$

أي أن :

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \psi(u,y_1+y_2)=+\infty$$

وهذا يؤكد قسرية الدالة $\psi(\,.\,,y_1+y_2)$.

ونلاحظ من جهة أخرى أن : $\psi(\,.\,,y_1+y_2)$ لا تطابق $+\infty$ ولا تأخذ نهائياً القيمة $-\infty$ إذا هي دالة خاصة وبالتالي بتطبيق المبرهنة 4.1 نحصل على :

$$\begin{aligned}
M_{e/h}(x) &= \inf_{u\in X}\ \sup_{y\in Y}\ \sup_{v\in Y}\{(L(u,v)+K(x-u,y-v)\}\\
&= \inf_{u\in X}\ \sup_{v\in Y}\{(L(u,v)+\sup_{z\in Y} K(x-u,z)\}\\
&= \inf_{u\in X}\ \sup_{v\in Y}\{(L(u,v)+M_2(x-u)\}\\
&= \inf_{u\in X}\{(M_1(u)+M_2(x-u)\}\\
&=(M_1 \underset{e}{+} M_2)(x)
\end{aligned}$$

أخيرا يبرهن الجزء الثاني بنفس الطريقة السابقة باستخدام تعريف الدالة الحدية الدنيا وتطبيق المبرهنة

4.1 فنحصل على : $m_{e/h}(y) = (m_1 \underset{h}{+} m_2)(y)$. ■

مبرهنة 4.3 :

من أجل كل دالة $L : X \times Y \to \overline{R}$ محدبة - مقعرة ومن أجل كل $\lambda > 0$ لدينا :

$$M^{\lambda}_{e/h} = \lambda \underset{e}{*} M^{L}$$

$$m^{\lambda}_{e/h} = \lambda \underset{h}{*} m^{L}$$

حيث $M^{\lambda}_{e/h},\ M^{L}$ $(m^{\lambda}_{e/h}, m^{L})$ هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) على الترتيب

لكل من الدوال $\lambda \underset{e/h}{*} L \ , L$.

البرهان :

بالاعتماد على تعريف الدالة الحدية العليا في العلاقة (5) يكون :

$$\begin{aligned} M^{\lambda}_{e/h}(x) &= \sup_{y \in Y} \{(\lambda \underset{e/h}{*} L)(x,y)\} \\ &= \sup_{y \in Y} \{(\lambda L)\,(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)\} \\ &= \lambda M^{L}(\lambda^{-1}x) \\ &= \lambda \underset{e}{*} M^{L}(x) \end{aligned}$$

نبرهن صحة العلاقة $m^{\lambda}_{e/h} = \lambda \underset{h}{*} m^{L}$ بطريقة مشابهة . ■

5 - تقارب المجموع فوق /تحت البياني :

مبرهنة 5.1 [13] :

ليكن X فضاءاً منظماً ولتكن $f_i, g_i \; ; i=1,2$ دوالاً معرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$ ، محدودة من الأسفل بالعدد $\beta \in R$ وتحقق الشرط الآتي : من أجل كل $\rho \geq 0$ و $\theta \geq 0$ يوجد $\gamma = \gamma(\rho, \theta)$ بحيث يكون :

$$\left\{ f_i(u) + g_i(v) \leq \theta, \| u+v \| \leq \rho; \; i=1,\,2 \right\} \Rightarrow \left(\|u\| \leq \gamma ; \|v\| \leq \gamma \right)$$

عندئذ :

$$h_\rho\left(f_1 \underset{e}{+} g_1, f_2 \underset{e}{+} g_2\right) \leq h_{\rho_1}\left(f_1, f_2\right) + h_{\rho_1}\left(g_1, g_2\right)$$

حيث : $\rho_1 = \rho_1(\rho, \theta)$

مبرهنة 5.2 :

لتكن $\left\{ L_n, L : X \times Y \longrightarrow \overline{R} \quad ; \quad n \in N \right\}$ و $\left\{ K_n, K : X \times Y \longrightarrow \overline{R} \quad ; \quad n \in N \right\}$

متتاليتين من الدوال المحدبة - المقعرة بحيث تكون :

1) كل من مجموعتي الدوال $\left\{ L, K \right\}$ و $\left\{ L_n, K_n \; ; \; n \in N \right\}$ محققة لشروط المبرهنة 3.2 .

2) الدوال الحدية العليا $M_n^{K_n}, M^K, M_n^{L_n}, M^L$ (على الترتيب الدوال الحدية الدنيا $m_n^{K_n}, m^K, m_n^{L_n}, m^L$)

محدودة من الأسفل بالعدد $\beta \in R$ (على الترتيب محدودة من الأعلى بالعدد $\alpha \in R$)

3) $-m_n^{L_n}, -m^L$ دوالاً قسرية .

ولنفرض أنه :

$$\lim_{n \to \infty} H\rho(K_n, K) = 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} H\rho(L_n, L) = 0 \quad ; \quad \forall \rho \geq 0 \qquad (12)$$

عندئذ :

$$\lim_{n\to\infty} H\rho(L_n \underset{e/h}{+} K_n\ ,K \underset{e/h}{+} L)=0 \quad ; \quad \forall\rho\geq 0 \qquad (13)$$

البرهان :

قبل البدء بالبرهان نعرض التمهيدية الآتية :

تمهيدية 5.3 :

لتكن $\left\{ f_n, f : X \to \overline{R}\ ; n\in N \right\}$ متتالية من الدوال المحدودة من الأسفل بالعدد $\beta\in R$ ولنفرض إن إحداها قسرية ولتكن الدالة f . عندئذ من أجل كل $\varepsilon>0$ و $\rho>0$ يوجد $\gamma := \gamma(\varepsilon,\ \rho)$ بحيث يتحقق الشرط التالي :

$$(f_n(x)+f(y)\leq\varepsilon\ ,\ \|x+y\|\leq\rho) \Rightarrow \|x\|\leq\gamma\ ,\ \|y\|\leq\gamma\ .$$

البرهان :

ليكن $\varepsilon>0$ و $\rho>0$ بحيث يكون $f_n(x)+f(y)\leq\varepsilon\ ,\ \|x+y\|\leq\rho$. بما أن f دالة قسرية إذاً يوجد عدد موجب تماماً k بحيث يكون $f(y)\geq k\left(\|y\|\right)$. ومنه من أجل كل $n\in N$ يكون $f_n(x)\leq\varepsilon-k\left(\|y\|\right)$. ولما كانت f_n محدودة من الأسفل بالعدد $\beta\in R$ ، فإن $\beta\leq f_n(x)$ ،

وبالتالي $\beta\leq f_n(x)\leq\varepsilon-k\left(\|y\|\right)$

ومنه نستنتج أن : $\|y\|\leq k^{-1}\left(\varepsilon-\beta\right)$

من جهة أخرى لدينا :

$$\|x\|=\|x+y-y\|\leq\rho+k^{-1}\left(\varepsilon-\beta\right)$$

بأخذ $\gamma=\gamma(\varepsilon,\ \rho)=\rho+k^{-1}\left(\varepsilon-\beta\right)$ نحصل على المطلوب . ■

بالعودة إلى برهان المبرهنة 5.2 : من أجل كل $\rho\geq 0$ وحسب تعريف H_ρ يكون لدينا :

$$H_\rho(L_n \underset{e/h}{+} K_n\ ,L \underset{e/h}{+} K)=h_\rho(M_n,M)+h_\rho(m_n,m) \qquad (14)$$

حيث M_n, M (m_n, m) هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) على الترتيب لكل من $L_n \underset{e/h}{+} K_n$, $K \underset{e/h}{+} L$ ، واعتماداً على المبرهنة 4.2 نستطيع أن نكتب :

$$M_n = M_n^{L_n} \underset{e}{+} M_n^{K_n} \quad , \quad M = M^L \underset{e}{+} M^K$$

$$m_n = m_n^{L_n} \overset{h}{+} M_n^{K_n} \quad , \quad m = m^L \overset{h}{+} m^K$$

ومنه :

$$h_\rho(M_n, M) = h_\rho(M_n^{L_n} \underset{e}{+} M_n^{K_n}, M^L \underset{e}{+} M^K) \qquad (15)$$

$$h_\rho(m_n, m) = h_\rho(m_n^{L_n} \underset{e}{+} m_n^{K_n}, m^L \underset{e}{+} m^K) \qquad (16)$$

حسب الفرض (1) تكون الدوال $\{L_n, L \; ; \; n \in N\}$ قسرية على X وبالتالي الدوال الحدية العليا الموافقة لها $M_n^{L_n}, M^L$ هي أيضاً قسرية على X ، وباستخدام الفرض (2) و (3) وحسب التمهيدية السابقة تكون شروط المبرهنة 5.1 محققة وبتطبيق هذه المبرهنة على العلاقتين (15) و (16) وبالاستفادة من العلاقة (3) نحصل على :

$$h_\rho(M_n, M) \le h_{\rho_1}(M_n^{L_n}, M^L) + h_{\rho_1}(M_n^{K_n}, M^K) \qquad (17)$$

$$h_\rho(m_n, m) \le h_{\rho_2}(m_n^{L_n}, m^L) + h_{\rho_2}(m_n^{K_n}, m^K) \qquad (18)$$

بتعويض (17) و (18) في (14) نحصل على :

$$\begin{aligned} K_n , L \underset{e/h}{+} K) &\le \left[h_{\rho_1}(M_n^{L_n}, M^L) + h_{\rho_1}(M_n^{K_n}, M^K) \right] + \left[h_{\rho_2}(m_n^{L_n}, m^L) + h_{\rho_2}(m_n^{K_n}, m^K) \right] \\ &= \left[h_{\rho_1}(M_n^{L_n}, M^L) + h_{\rho_2}(m_n^{L_n}, m^L) \right] + \left[h_{\rho_1}(M_n^{K_n}, M^K) + h_{\rho_2}(m_n^{K_n}, m^K) \right] \\ &\le H_\gamma(L_n, L) + H_\gamma(K_n, K) \qquad (19) \end{aligned}$$

حيث : $\rho_1=\rho_1(\rho,\beta)$, $\rho_2=\rho_2(\rho,\alpha)$ و $\gamma=\max(\rho_1,\rho_2)$ وبأخذ نهاية طرفي المتراجحة (19) عندما $n\to\infty$

وباستخدام الفرض (12) نحصل على المطلوب . ■

مبرهنة 5.4 :

لتكن $\left\{L_n,L:X\times Y\longrightarrow\overline{R}\quad;\quad n\in N\right\}$ متتالية من الدوال المحدبة - المقعرة بحيث تكون الدوال الحدية العليا $M_n^{L_n},M^L$ (على الترتيب الدوال الحدية الدنيا $m_n^{L_n},m^L$) محدودة من الأسفل بالعدد $\beta\in R$ (على الترتيب محدودة من الأعلى بالعدد $\alpha\in R$) ، ولنفرض أنه من أجل كل $\rho\geq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}H_\rho(L_n,L)=0$$

عندئذ :

$$\lim_{n\to\infty}H_\rho(\lambda \underset{e/h}{*} L_n,\lambda \underset{e/h}{*} L)=0\quad;\ \forall\rho\geq 0\ ,\ \lambda>0 \qquad (20)$$

البرهان

حسب تعريف H_ρ يكون لدينا :

$$H_\rho(\lambda \underset{e/h}{*} L_n,\lambda \underset{e/h}{*} L)=h_\rho(M_n^\lambda,M^\lambda)+h_\rho(m_n^\lambda,m^\lambda) \qquad (21)$$

حيث : M_n^λ,M^λ $\left(m_n^\lambda,m^\lambda\right)$ هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) على الترتيب لكل من $\lambda \underset{e/h}{*} L_n,\lambda \underset{e/h}{*} L$

واعتمادا على المبرهنة 4.3 نستطيع أن نكتب :

$$M_n^\lambda=\lambda \underset{e}{*} M_n^{L_n}\ ,\quad M^\lambda=\lambda \underset{e}{*} M^L$$

$$m_n^\lambda=\lambda \overset{h}{*} m_n^{L_n}\ ,\quad m^\lambda=\lambda \overset{h}{*} m^L$$

وبالتعويض في العلاقة (21) نحصل على :

$$H_\rho(\lambda \underset{e/h}{*} L_n , \lambda \underset{e/h}{*} L) = h_\rho(\lambda \underset{e}{*} M_n^{L_n}, \lambda \underset{e}{*} M^L) + h_\rho(\lambda \overset{h}{*} m_n^{L_n}, \lambda \overset{h}{*} m^L)$$

بتطبيق المبرهنة 6.9 في [13] نستنتج أن :

$$H_\rho(\lambda \underset{e/h}{*} L_n , \lambda \underset{e/h}{*} L) \le h_{\rho^\sim}(M_n^{L_n}, M^L) + h_{\rho^\sim}(m_n^{L_n}, m^L)$$

$$= H_{\rho^\sim}\left(L_n , L\right) \qquad (22)$$

حيث $\rho^\sim = \rho^\sim(\rho,\lambda)$ ، بأخذ نهاية طرفي المتراجحة (22)عندما $n \to \infty$ وباستخدام الفرض نحصل على (20) . ■

References

[1] ATTOUCH, H. : Variational convergence for functions and operators, Pitman, London, 1984.

[2] ATTOUCH, H. : Viscosity solutions of minimizations problems , SIAM , J .Optim. 6(3) ,551-561 ,(1996) .

[3] ATTOUCH, H; WETS,R.: Convergence Theory of saddle functions, Trans. Amaer. Math.Soc. 280, n (1), 1983, 1-14.

[4] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS,R.: Convergence of convex-concave saddle functions, Ann. H.Poincare, Analyse non linéaire, 5, 1988, 532-572.

[5] K .Mouallif: . convergence Variationelle et méthods perturbeés pour les probléms d' optimization et point-selles, "Thése",universitéde liege,(1989).

[6] R. ROCKAFELLAR : Generalized second derivatives of convex functions and saddle functions preprint.

[7] M.SOUEYCATT: Analyse epi/hypo-graphique .J. convex Analysis, vol. II ,(13),1-55,(1991).

[8] ROCKAFELLAR, R. : convex Analysis . Princeton University Press, Princeton N. J, 1970.
[9] MOREAU, J.J. Théoréme "inf-sup" C.R.A.S.T. 285, 1964 , 2720-2722
[10] K. Torralba: convergence epigraphique et changements d' echelle en analyse varationelle et optimization . "Thése", Université de Monpellier II, (1996) .
[11] M. SOUEYCATT : Epi-convergence et convergence des sections. Application à la stabilité des ε –points-selles. A. V. A. M. C. vol. II, 1987.
[12] ATTOUCH, H; WETS,R.: Epigraphic analysais, analyse non linéaire, Gauthiers-Villars, paris, (1989), 74-99.
[13] ATTOUCH, H; WETS,R. : Quantitative stability of variational systems : the epi-graphical distance Tran . Amer . Soc. 328 (2) , 695-729 , (1991) .
[14] D.Azé and J.B.Penot : Operations on convergentc families of sets and functions.
A.V.A. M.C. 1987,Vol. I, (1987) .
[15] BEER, G.: Conjugate convex function , and the epi-distance topology, Proc. Amer. Soc. 108, 1991, 117-126.
[16] BEER, G.; Lucchetti , R: Coninuity results for the epi-distance topology with applications to convex optimization problems, (preprint) .
[17] H . Riahi: Stability results for optimization problems relativey to epigraphic distance Applications to non linear programming .A.V.M.A.C.vol. II, (1987) .
[18] J.Aubin , P.Ekland :Applied nonlinear analysais. J.Wiley intersciences ,New York , (1984).